

**Муниципальный этап
всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2024-2025 учебном году
в Кемеровской области – Кузбассе**

Теоретический тур

11 класс

Максимальное количество баллов - 35.

Время выполнения - 235 минут.

Краткая инструкция.

Все олимпиадные задания выполняются письменно. Желательно пользоваться ручками с чернилами синего цвета. Чертежи производить желательно ручкой (сначала возможно использовать карандаш, но потом чертеж обвести ручкой). Разрешается использовать чертёжные принадлежности (линейка, циркуль, ластик) для выполнения заданий.

Участник олимпиады на выданном бланке ответов записывает подробные решения задач, указывая соответствующий номер задачи. Переписывать формулировки заданий не обязательно. Предварительные вычисления можно делать на выданных дополнительных листах (черновиках).

При выполнении заданий не допускается использование справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники.

После завершения работы все бумаги должны быть сданы организаторам олимпиады, включая черновики.

Решения задач, критерии оценивания

1. Двое играют в игру: по очереди берут из кучи камней один, два или три камня. Проигравшим считается тот, кто заберет последний камень. При каком изначальном количестве камней начинающий сможет выиграть?

Решение. Опишем выигрышную стратегию первого игрока. Чтобы выиграть, нужно, чтобы после каждого хода первого оставалось число камней, дающее остаток 1 при делении на 4, то есть $4k+1$ камней, $k=0,1,2,\dots$

Если изначально число камней $n = 4k$ или $n = 4k+3$, или $n = 4k+2$, $k=1,2,3,\dots$, то первым ходом первый игрок берет 3 или 2, или 1 камень, соответственно. Далее, если второй игрок берет m камней, то первый берет $4-m$ камней. То есть после хода первого количество камней уменьшается на 4. После последнего хода первого игрока останется 1 камень, и он выигрывает. Если $n=2$ или $n=3$, то первый игрок берет 1 или 2 камня, соответственно, и выигрывает.

Если изначально число камней $n = 4k+1$, $k=0,1,2,\dots$, то первый игрок не сможет выиграть, так как четыре камня брать не разрешается, описанной выигрышной стратегией может воспользоваться второй игрок.

Ответ: число камней $n=4k$ или $n=4k-1$, или $n=4k-2$, $k=1,2,\dots$

Указания. Верное решение с описанием выигрышной стратегии – 7 баллов. Только ответ, без стратегии - 1 балл. Одно из трех значений n с указанием стратегии - по 2 балла. Частные случаи значений n - 0 баллов.

2. В коробке лежат 40 одинаковых по виду конфет с начинкой. Известно, что некоторые из конфет имеют шоколадную начинку, и их количество четно. Разрешается указать на любые две конфеты и спросить, есть ли среди них хотя бы одна с шоколадной начинкой. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно определить какую-нибудь конфету с шоколадной начинкой?

Решение. Пример. Занумеруем конфеты числами от 1 до 40 и будем вопрос обозначать парой номеров конфет (k,m) . Покажем, что за 39 вопросов можно найти конфету с шоколадной начинкой. Зададим вопросы $(1, 2)$, $(1, 3)$, ..., $(1, 40)$. Если все ответы положительны, то первая конфета с шоколадной начинкой, а иначе, есть еще хотя бы одна конфета (n -я) не с шоколадной начинкой (так как имеем четное количество всех конфет и конфет с шоколадной начинкой, а значит и конфет не с шоколадной начинкой тоже четно), и на вопрос $(1, n)$ получили бы отрицательный ответ. Если же хотя бы один ответ отрицателен, то первая конфета не с шоколадной начинкой, тогда с шоколадной начинкой являются те конфеты, про которые (в паре с первым) ответ был положительным, и в этом случае мы найдем все конфеты с шоколадной начинкой.

Оценка. Пусть существует алгоритм, позволяющий гарантированно найти конфету с шоколадной начинкой за меньшее число вопросов.

Пусть ответы на все заданные вопросы - положительны. Тогда максимум после 38 вопроса можно указать на какую-то (k -ю) конфету с шоколадной начинкой. При этом какого-то из вопросов вида (k, m) задано не будет, так как вопросов с номером k : $(k, 1), (k, 2), \dots, (k, 40)$ всего 39 (нет вопроса (k, k)).

Заметим, что ответы на заданные вопросы не изменятся, если k -я и m -я конфеты будут не с шоколадной начинкой, а все остальные конфеты - с шоколадной начинкой, так как среди них нет вопроса (k, m) , который отрицательный. То есть все ответы на заданные вопросы будут также положительны, а указанная конфета (k -я) окажется не с шоколадной начинкой. Противоречие.

Ответ: за 39 вопросов.

Указания. Верное решение – 7 баллов. Только ответ - 0 баллов. Доказана оценка, что меньше 39 быть не может, - 4 балла, приведен какой-нибудь правильный пример - 3 балла.

3. Найти все натуральные n , для которых $n \cdot 2^{n-1} + 1$ делится на 3.

Решение. Запишем на языке сравнений доказываемое утверждение.

$n \cdot 2^{n-1} + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ или $n \cdot 2^{n-1} \equiv 2 \pmod{3}$, сократим на 2, так как 2 и 3 - взаимно просты, $n \cdot 2^{n-2} \equiv 1 \pmod{3}$. Данное сравнение равносильно объединению двух систем сравнений.

1) $\{n \equiv 1 \pmod{3}, 2^{n-2} \equiv 1 \pmod{3}\}$ или 2) $\{n \equiv 2 \pmod{3}, 2^{n-2} \equiv 2 \pmod{3}\}$.

Используя малую теорему Ферма: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, p -простое, $\text{НОД}(a, p) = 1$, вторые сравнения в каждой системе заменяем равносильными:

1) $\{n \equiv 1 \pmod{3}, n-2 \equiv 0 \pmod{2}\}$ или

2) $\{n \equiv 2 \pmod{3}, n-3 \equiv 0 \pmod{2}\}$.

1) $\{n = 1 + 3k, 3k \equiv 1 \pmod{2}\} \Rightarrow \{k = 1 + 2m, n = 4 + 6m, m - \text{целое}\}$.

2) $\{n = 2 + 3k, 3k \equiv 1 \pmod{2}\} \Rightarrow \{k = 1 + 2m, n = 5 + 6m, m - \text{целое}\}$.

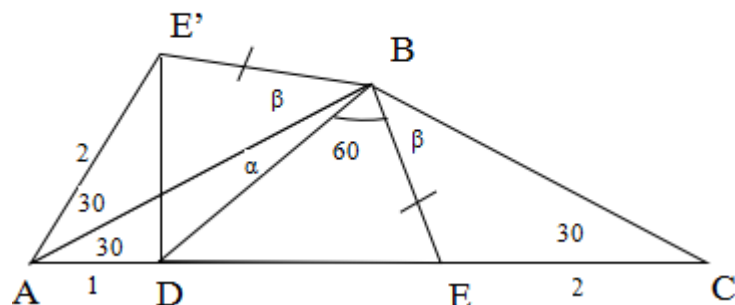
Ответ: $n = 4 + 6m, 5 + 6m, m - \text{целое}$.

Указания. Верное решение с доказательством, что только эти значения при любом m подходят, возможно другими способами, – 7 баллов. Только ответ, без доказательства, что других решений нет - 1 балл. Только одно из двух значений n , с доказательством, что оно подходит при любом m , - 3 балла. Частные случаи значений n - 0 баллов.

4. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом B , равным 120° . Проведены отрезки BD и BE к основанию AC , такие, что $AD = 1$, $CE = 2$ и угол DBE равен 60° . Найти длину отрезка DE .

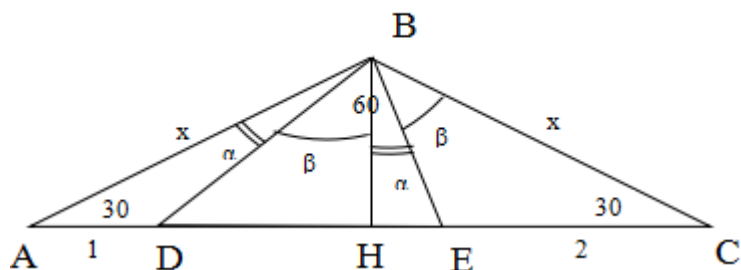
Решение. Углы при основании равны 30° . Пусть $\angle ABD = \alpha$, $\angle CBE = \beta$, так как $\angle DBE = 60^\circ$, то $\alpha + \beta = 60^\circ$.

1 способ.



Повернем треугольник BEC вокруг точки B на угол 120° , тогда точка C перейдет в точку A, точка E - в точку E', при этом $\angle BAE' = 30^\circ$, $AE' = 2$, $BE' = BE$, $\angle ABE' = \beta$. Проведем отрезок DE'. В треугольнике ADE' $\angle DAE' = 60^\circ$, $DA = 1$, $AE' = 2$, значит треугольник прямоугольный с $\angle ADE' = 90^\circ$. Тогда катет $DE' = \sqrt{3}$. Рассмотрим треугольники DE'B и DBE, у них BD - общая, $BE = BE'$, $\angle DBE' = \alpha + \beta = 60^\circ = \angle DBE$, то есть треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. Тогда $DE = DE' = \sqrt{3}$.

2 способ (тригонометрический).



Пусть боковая сторона треугольника равна x . Проведем высоту BH в треугольнике ABC. Так как треугольники ABH и CBH прямоугольные с углом 30° и гипотенузой x , то $BH = x/2$, $AH = CH = (x\sqrt{3})/2$ и $DH = (x\sqrt{3})/2 - 1$, $EH = (x\sqrt{3})/2 - 2$, при этом $x > 2$.

Треугольники DBH, EBH также прямоугольные с углами при вершине B - β и α , соответственно, тогда $\operatorname{tg} \beta = DH/BH = \sqrt{3} - 2/x$, $\operatorname{tg} \alpha = EH/BH = \sqrt{3} - 4/x$.

Имеем, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) / (1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta) = (\sqrt{3} - 4/x + \sqrt{3} - 2/x) / (1 - (\sqrt{3} - 4/x)(\sqrt{3} - 2/x)) = (2\sqrt{3}x^2 - 6x) / (-2x^2 + 6\sqrt{3}x - 8)$, где $-2x^2 + 6\sqrt{3}x - 8 \neq 0$ (*).

Получаем уравнение $\sqrt{3}x^2 - 6x + 2\sqrt{3} = 0$. Корни уравнения: $x_1 = \sqrt{3} + 1$ (удовлетворяет условию (*)), $x_2 = \sqrt{3} - 1 < 2$ (не подходит).

Тогда $DE = DH + EH = \sqrt{3}x - 3 = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) - 3 = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Указания. Верное решение – 7 баллов. Только ответ - 0 баллов. Если при решении с помощью тригонометрических вычислений есть значимые продвижения, но решение не доведено до конца, то начисляются 1-3 балла. При верном решении, в котором есть арифметическая ошибка, вычитается 1 балл.

5. Докажите, что для любых чисел x, y, z , больших 1, верно неравенство:

$$2 \left(\frac{\log_y x}{x+y} + \frac{\log_z y}{y+z} + \frac{\log_x z}{x+z} \right) \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Решение. Заметим, что числа $\log_y x, \log_z y, \log_x z$ положительны и

$$\log_y x \cdot \log_z y \cdot \log_x z = \log_y x \cdot \frac{1}{\log_y z} \cdot \frac{\log_y z}{\log_y x} = 1.$$

Применим дважды неравенство Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом значениях: $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$.

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{\log_y x}{x+y} + \frac{\log_z y}{y+z} + \frac{\log_x z}{x+z} \right) &= \frac{6}{3} \left(\frac{\log_y x}{x+y} + \frac{\log_z y}{y+z} + \frac{\log_x z}{x+z} \right) \geq \\ &\geq 6 \sqrt[3]{\frac{\log_y x}{x+y} \cdot \frac{\log_z y}{y+z} \cdot \frac{\log_x z}{x+z}} = \frac{6}{\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(x+z)}} \geq \\ &\geq \frac{6}{\frac{x+y+y+z+x+z}{3}} = \frac{18}{2x+2y+2z} = \frac{9}{x+y+z}. \end{aligned}$$

Указания. Верное решение – 7 баллов. Применили первый раз неравенство Коши - 3 балла. Имеются какие-нибудь существенные продвижения, но решение не доведено до конца - 1-3 баллов.